

berechnet ( $N$  = Anzahl der Elektronen in  $V$ ,  $m_{el}$  = Masse des Elektrons,  $\mu_B$  = BOHRSCHE Magnet,  $g_{el}$  = Anomaliefaktor  $\approx 2$ ).

Eine detaillierte Diskussion der Gln. (1) bis (3) zeigt, daß sich in dem dem Experiment zugänglichen Temperaturgebiet

$$\frac{T_0}{T_e} \ll 1, \quad \frac{T_0}{T_e} \ll 2 \left| \frac{k T_s}{g \mu_B H} \right|, \quad \left( \frac{\mu_B H}{k T_0} \right)^2 \left( \frac{T_e}{T_0} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (4)$$

$$\left[ T_e = \text{Entartungstemperatur} = \frac{2 \hbar^2 \pi}{m_{el} k} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \right]$$

weiterhin eine temperaturunabhängige Bahnsuszeptibilität  $\chi_0$  ergibt, während die Spinsuszeptibilität  $\chi_s$  wieder proportional zu  $T_0/T_s$  wird. Die Gesamtsuszeptibilität des freien, entarteten Elektronengases ist in dieser Näherung gegeben durch

$$\chi = \chi_s + \chi_0 = \frac{m_{el} \mu_B^2}{\hbar^2 \pi^2} \left( 3 \pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} V \left\{ \frac{T_0}{T_s} - \frac{1}{3} \right\}. \quad (5)$$

## Effektive Zustandsdichten beim Tunneleffekt

Von WALTER FRANZ

Theoretische Abteilung des Instituts für Angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforsch. 16 a, 436–438 [1961]; eingeg. am 27. Februar 1961)

Die Experimente<sup>1</sup> über den Tunnelstrom zwischen normal- und supraleitenden Metallen bzw. zwischen zwei Supraleitern wurden zur Bestimmung der Energiestruktur des Supraleiters herangezogen unter der Annahme, daß im Grenzfall tiefer Temperatur die Charakteristik das direkte Abbild der Zustandsdichte  $\varrho(E)$  ist.

BARDEEN<sup>2</sup> hat versucht, diese Deutung theoretisch dadurch zu stützen, daß er plausibel macht, daß die Matricelemente des Tunnelübergangs im normalleitenden und supraleitenden Zustand dieselben sind. Diese Plausibilitätsbetrachtung erscheint jedoch problematisch, da der Übergang mit dem Stromdurchgang durch Grenzflächen verbunden ist, und die hierfür maßgebliche Gruppengeschwindigkeit der Ladungsträger im Zustand der Supraleitung grundlegend geändert wird. Deshalb wird im folgenden der Übergang in der Näherung der effektiven Massen unmittelbar berechnet. — Zwei Materialien, in welchen die Energie  $E$  in verschiedener Weise vom Impuls  $\mathbf{p}$  abhängt, seien durch eine Ebene senkrecht zur  $x$ -Achse eines Koordinatensystems getrennt; für eine Einelektronen-SCHRÖDINGER-Funktion gelten dann die folgenden Grenzbedingungen:

$$\psi \text{ stetig; } \frac{\partial E}{\partial (p^2)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ stetig.} \quad (1)$$

Die letzte Bedingung sorgt für die Kontinuität des Teilchenstromes senkrecht zur Grenzfläche. Wir betrachten nunmehr ein „sandwich“, bestehend aus zwei Metallen

Damit hat man die Möglichkeit durch Veränderung des Verhältnisses von  $T_0/T_s$  den Spinparamagnetismus  $\chi_s$  und den Diamagnetismus  $\chi_0$  der Leitungselektronen experimentell getrennt zu bestimmen: Für  $T_s = T_0$  erhält man das übliche Ergebnis, für  $T_s = 3 T_0$  verschwindet die Gesamtsuszeptibilität, für  $|T_s| > 3 T_0$  und für negative  $T_s$  ist  $\chi$  stets negativ. Bei Sättigung ( $T_s = \infty$ ) resultiert allein der LANDAUSCHE Diamagnetismus.

Wenn auch die vorliegenden Ergebnisse auf der Näherung eines freien Elektronengases beruhen, die in einem realen Metall durch die Wechselwirkung mit dem Gitter und die Wechselwirkung zwischen den Elektronen modifiziert werden, so kann man doch erwarten, daß sich im Experiment eine entsprechende Temperaturabhängigkeit zeigt, wodurch ein weiterer Einblick in den Magnetismus der Leitungselektronen in Metallen gegeben wäre.

1 und 2, getrennt durch eine planparallele isolierende Schicht der Dicke  $d$ , in welcher für die betrachtete Energie der Impuls eine rein imaginäre  $x$ -Komponente besitzt, eine Elektronenwelle also mit der Dämpfungskonstante  $\kappa_x = i p_x / \hbar$  behaftet ist. Der Reflektionskoeffizient  $R$  und Durchlaßkoeffizient  $D_{12}$  einer aus dem Material 1 anlaufenden ebenen Welle ergibt sich dann für  $\kappa_x d \gg 1$  zu

$$R = 1 - \frac{16 v_{0x}^2 v_{1x} v_{2x}}{(v_{1x}^2 + v_{0x}^2)(v_{2x}^2 + v_{0x}^2)} e^{-2 \kappa_x d}; \quad (2)$$

$$v_{2x} D_{12} = v_{1x} (1 - R).$$

Hierbei bedeutet

$$v_0 \equiv \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}}; \quad v_1 \equiv \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_1}; \quad v_2 \equiv \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_2}. \quad (3)$$

Der gesamte Strom von Metall 1 nach 2 abzüglich des Stromes von 2 nach 1 ergibt sich dann zu

$$I = \frac{2e}{h^3} \int d^3 \mathbf{p}_1 v_{2x} D_{12} f_1 (1 - f_2) - \frac{2}{h^3} \int d^3 \mathbf{p}_2 v_{1x} D_{21} f_2 (1 - f_1). \quad (4)$$

$f_1, f_2$  sind die FERMISCHE Verteilungsfunktionen in Material 1 und Material 2 bei der betrachteten Energie. Die Integration über die Komponenten  $p_y, p_z$  kann näherungsweise ausgeführt werden; wegen der mit wachsendem Betrag dieser Größen rasch zunehmenden Dämpfung  $\kappa_x = \sqrt{\kappa^2 + (p_y^2 + p_z^2)/\hbar^2}$  setzen wir in allen Gliedern außer der Exponentialfunktion von Gl. (2)  $p_y = 0, p_z = 0$ , führen dann noch an Stelle von  $p_x$  die Energie als Integrationsvariable ein mit dem Ergebnis:

$$I = \frac{2 \pi e}{h^3} \int dE \kappa d (1 - R) (f_1 - f_2). \quad (5)$$

<sup>1</sup> J. GIAEVER, Phys. Rev., Letters 5, 147, 464 [1960]. — J. NICOL, S. SHAPIRO u. H. SMITH, Phys. Rev., Letters 5, 461 [1960].

<sup>2</sup> J. BARDEEN, Phys. Rev., Letters 6, 57 [1961].



Zu integrieren ist hier nur über diejenigen Energieintervalle, welche sowohl im Material 1 als auch im Material 2 in dem Impulsraum vorkommen, die verbotenen Energien sind also auszuschließen. Man sieht nun aus Gl. (2), daß der Faktor  $1-R$  nicht genau — wie dies der BARDEENSCHEN Plausibilitätsbetrachtung entsprechen würde — proportional zu dem Produkt der beiden Zustandsdichten ist; die Zustandsdichte pro Raumvolumen und Energieintervall ist nämlich gegeben durch  $\hbar^3/8\pi p^2 v$ , bis auf einen in der Umgebung der FERMI-Fläche konstanten Faktor also durch

$$\varrho_1(E) = \frac{V_1}{v_1}; \quad \varrho_2(E) = \frac{V_2}{v_2}, \quad (6)$$

wo  $V_1, V_2$  die FERMI-Geschwindigkeiten für das normalleitende Material seien. Nimmt man noch an, daß  $v_0$  in dem betrachteten Energiebereich konstant ist, so erhält man an Stelle von Gl. (5):

$$I = A \int dE \bar{\varrho}_1 \bar{\varrho}_2 (f_1 - f_2). \quad (7)$$

Darin ist die Größe

$$A = \frac{32 \pi \kappa d v_0^2 e}{\hbar^3 V_1 V_2} e^{-2 \kappa d} \quad (8)$$

ein Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit, an Stelle der Zustandsdichten treten jedoch „effektive Zustandsdichten“

$$\bar{\varrho}_i \equiv \frac{\varrho_i}{1 + a_i^2 \varrho_i^2}, \quad a_i \equiv \frac{v_0}{V_i}. \quad (9)$$

Gl. (7) läßt sich nunmehr ohne Ausschluß der verbotenen Energiegebiete verwenden, wenn dort  $\varrho_i = 0$  gesetzt wird. — In einem BCS-Supraleiter von der halben Energielücke  $\varepsilon_i$  ist die durch (6) definierte Zustandsdichte gegeben durch

$$\varrho_i = \left(1 - \frac{\varepsilon_i^2}{(E - \zeta)^2}\right)^{-1/2}. \quad (10)$$

Die zugehörigen effektiven Zustandsdichten für verschiedene Werte des Parameters  $a_i$  sind in Abb. 1 angegeben.

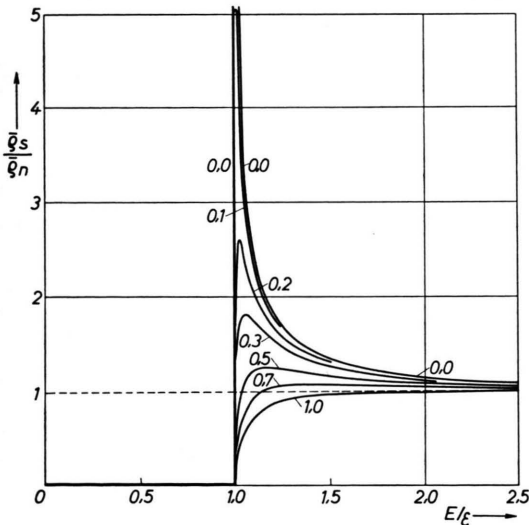


Abb. 1. Effektive Zustandsdichten im BCS-Supraleiter von der halben Energielücke  $\varepsilon$ ;  $a$  ist Kurvenparameter [s. Gl. (9)].

Rechnet man die Energie von der FERMI-Kante aus, dann erzeugt eine Spannung  $U$  den folgenden Strom:

$$I(U) = A \int_{-\infty}^{+\infty} dE \bar{\varrho}_1(E) \bar{\varrho}_2(E + eU) [f(E) - f(E + eU)]. \quad (11)$$

Sind beide Teile normalleitend, also in unserer Näherung beide  $\bar{\varrho}_i$  konstant, so folgt

$$I_{nn} = A \bar{\varrho}_1 \bar{\varrho}_2 e U. \quad (12)$$

Ist nur Metall 1 supraleitend, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{sn}}{dU} &= -e A \bar{\varrho}_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE \bar{\varrho}_1(E) \frac{df(E + eU)}{dE} \\ &\approx e A \bar{\varrho}_2 \bar{\varrho}_1 (-e U). \end{aligned} \quad (13)$$

Der letzte Ausdruck ergibt sich im Limes tiefer Temperatur. Die differentielle Charakteristik wird also hier proportional zur effektiven Zustandsdichte des Supraleiters. Bei endlicher Temperatur erhält man zusätzlich einen exponentiell abfallenden Ausläufer in das Gebiet  $|eU| < \varepsilon_1$ . — Sind beide Materialien Supraleiter mit erheblich verschiedener Sprungtemperatur, so daß also  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 > 0$  ist, dann setzt bei der Temperatur  $T=0$  der Strom erst bei  $|eU| > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  ein, hat jedoch bei endlicher Temperatur wieder für kleinere Spannungen einen exponentiell kleinen Ausläufer, an welchem besonders interessant ist, daß er im Gebiet  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < eU < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  zu einer negativen Charakteristik führen kann. Der Anteil zum Strom, welcher bei kleiner Temperatur von der höchsten Größenordnung ist, wird dabei

$$I_{ss} \approx A \int_{-\infty}^{-\varepsilon_2} dE \bar{\varrho}_1(E - eU) \bar{\varrho}_2(E) e^{E/kT}.$$

Hierin ist unter den gegebenen Voraussetzungen der Faktor  $\bar{\varrho}_1$  verhältnismäßig langsam veränderlich, so daß er aus dem Integral herausgezogen werden kann mit dem Ergebnis

$$I_{ss} \approx A \bar{\varrho}_1(-\varepsilon_2 - eU) \int_{-\infty}^{-\varepsilon_2} dE \bar{\varrho}_2(E) e^{E/kT}. \quad (14)$$

Das Integral ist von der Spannung unabhängig, infolgedessen ist diesmal die Charakteristik (nicht wie vorhin ihre erste Ableitung) ein Abbild der effektiven Zustandsdichte  $\bar{\varrho}_1(E)$  im Bereich  $\varepsilon_1 < -E < \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ . Es hängt nun vom Betrag der Konstanten  $a_1$  ab, ob wirklich gemäß Abb. 1 in diesem Energiebereich  $\bar{\varrho}_1(E)$  abfällt und somit eine fallende Charakteristik für den Tunnelstrom bewirkt. Es darf deshalb nicht verwundern, wenn bei den Messungen nicht in allen Fällen eine fallende Charakteristik gefunden wird. In jedem Falle wird durch das Eintreten der effektiven Zustandsdichte der Bereich der negativen Charakteristik kleiner als  $2\varepsilon_2$ .

Um zu erreichen, daß sich die effektive Zustandsdichte möglichst wenig von der wahren unterscheidet (was allein eine genaue Ausmessung der Bandstruktur des Supraleiters erlaubt), muß man die Größe  $dE/dx$  klein halten. Nun befindet sich bei einem von Verunreinigungen freien isolierenden Material für sehr tiefe

Temperaturen die FERMI-Kante stets in der Mitte der Energielücke, und dort ist bei symmetrischer Struktur der Energielücke  $dz/dE=0$ ,  $v_0=\infty$ , was den Tunnel-effekt unterbinden und die Zustandsdichte völlig verdrängen würde (überdies müßte dann die oben gegebene Theorie modifiziert werden). Bei unsymmetrischer Struktur der Energielücke (effektive Massen im Leitungsband und Valenzband erheblich verschieden) würde zwar  $v_0$  an der FERMI-Grenze endlich, aber immer noch so groß, daß die effektive Zustandsdichte von der wahren erheblich abweicht. Um kleine Werte von  $v_0$  zu erreichen,

muß man die FERMI-Kante in die Nähe der oberen und unteren Grenze der Energielücke rücken, also dafür sorgen, daß die Austrittsarbeiten für Elektronen und Löcher möglichst verschieden sind.

Man wird vermuten dürfen, daß das Ergebnis der vollständigen BCS-Theorie zwischen der hier gegebenen Einteilchen-Theorie und der BARDEENSchen Annahme liegt.

Den Herren Prof. J. BARDEEN, Prof. W. SCHOTTKY und Dr. P. PRICE habe ich für wesentliche Diskussionsbemerkungen zu danken.

## Zur Deutung der Tunneldioden-Kennlinie aus ihrem Temperaturgang

Von G. WINSTEL

Mitteilung aus dem

Forschungslaboratorium der Siemens & Halske AG, München  
(Z. Naturforschg. 16 a, 438—440 [1961]; eingegangen am 9. März 1961)

Während das prinzipielle Verhalten von Tunneldioden durch die grundlegende Arbeit von ESAKI geklärt wurde<sup>1</sup>, bestehen hinsichtlich der Einzelheiten der Kennlinie und ihres quantitativen Verlaufs noch erhebliche Unklarheiten. Es wurde versucht, durch Untersuchung des Temperaturganges der einzelnen Zweige der Kennlinie einen weiteren Einblick in den Mechanismus des Stromtransports zu gewinnen. Unsere Messungen beschränken sich auf das Temperaturintervall zwischen 100 °K und 400 °K. Phononverarmungseffekte, die bei tieferen Temperaturen die Kennlinie stark beeinflussen können<sup>2</sup>, spielen daher praktisch keine Rolle.

Untersucht wurden die Kennlinien von Germanium- und Galliumarsenid-Tunneldioden. In beiden Fällen zeigte sich grundsätzlich das gleiche Verhalten, das eine Aufteilung der Kennlinie in drei durch verschiedene Stromführungsmechanismen beherrschte Bereiche nahelegt: ESAKI-Strom, Exzeßstrom  $j-w$  und Diodenstrom (vgl. Abb. 1).

Für die Beurteilung des Temperaturganges ist es zweckmäßig, die einzelnen Ströme in der umgekehrten Reihenfolge zu betrachten.

### 1. Diodenstrom

Der Diodenstrom zeigt einen Temperaturgang proportional  $T^2 \exp(-A - eU/kT)$ , wie er auf Grund der sogenannten Diodentheorie folgt. Die Aktivierungsenergie  $A$  setzt sich zusammen aus dem Bandabstand  $\Delta E$  und der Eindringtiefe  $z$  des FERMI-Niveaus auf einer Seite des p-n-Übergangs. Die Auswertung ergab beispielsweise für Proben mit einer Dotierung von einigen  $10^{19}/\text{cm}^3$  bei Zimmertemperatur folgende Werte:

für Germanium  $\Delta E + z = 0,62 \text{ eV}$ ,

für Galliumarsenid  $\Delta E + z = 1,1 \text{ eV}$ .

Für den Temperaturkoeffizienten ergibt sich im Bereich

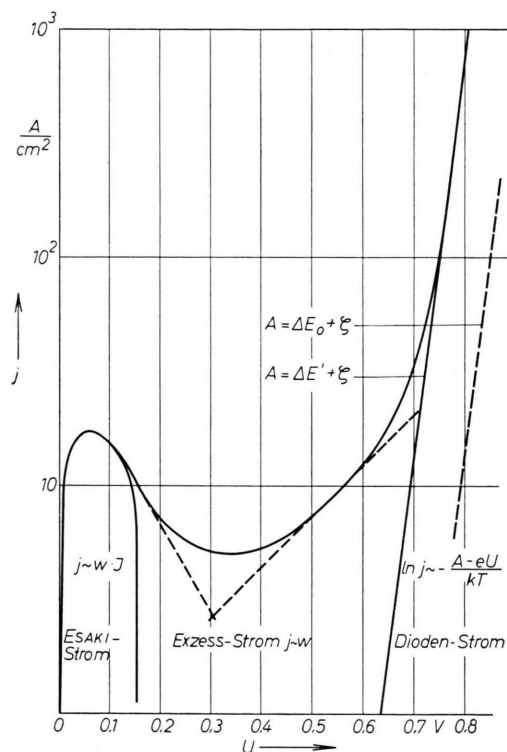


Abb. 1. Aufteilung des Tunnel-Diodenstromes nach Stromführungs-Mechanismen.

zwischen 200 °K und 400 °K ein praktisch konstanter Wert von

$$\frac{d(\Delta E + z)}{dT} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eV}}{^\circ\text{K}},$$

der fast mit dem bei schwach dotierten Proben gemessenen übereinstimmt.

Die Werte für die Aktivierungsenergie zeigen, daß der Bandabstand gegenüber seinem Wert bei schwachen Dotierungen vermindert ist. Dies kann auch theoretisch verstanden werden, wie bereits kürzlich mitgeteilt wurde<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> L. ESAKI, Phys. Rev. **109**, 603 [1959].

<sup>2</sup> N. HOLONYAK, Phys. Rev., Lett. **3**, 167 [1959].

<sup>3</sup> G. WINSTEL u. W. HEYWANG, Z. Naturforschg. **16a**, 440 [1961]; nachstehende Arbeit.